**Exercice 1 :**

La société produit trois types de fibres optiques à partir de silice, forme naturelle du dioxyde de silicium (Si02) qui entre dans la composition de nombreux minéraux. Elle produit :

* x pièces du type A, dont le débit supporté vaut 1 gigabit par seconde ;
* y pièces du type B, dont le débit supporté vaut 10 gigabits par seconde ;
* z pièces du type C, dont le débit supporté vaut 100 gigabits par seconde.

Pour une pièce, la masse de silice utilisée et le temps de production de chacun de ces types de fibres sont récapitulés dans le tableau suivant.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Type de fibre | A | B | C |
| Masse de silice en kg (par pièce) | 3 | 4 | 7 |
| Temps de production en h (par pièce) | 2 | 3 | 5 |

La société modélise cette fabrication afin d’envisager différents scénarios sur une période donnée. Pour cette période, on note N le nombre total de pièces produites, S la masse totale en kg de silice utilisée et H le temps total de production, exprimé en heure.

**1.** Justifier le fait que x, y, z vérifient le système : .

**2.** On considère les matrices colonnes  et . Déterminer la matrice carrée M qui traduit le système ci-dessus par l’équation matricielle .

**3.** Calculer *Y* lorsque . Interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l’exercice.

**4.** On considère la matrice carrée .

**a)** Calculer le produit matriciel .

**b)** Montrer que si , alors .

**c)** Pour une période donnée, l’entreprise dispose de 94 kg de silice et de 67 heures de production. Elle souhaite fabriquer 21 pièces de fibres. Combien de pièces de chaque type peut-t-elle fabriquer ?

**Exercice 2 :**

Un opérateur de téléphonie mobile propose trois offres de forfait mensuel sans engagement à ses clients. Chaque offre met à disposition du client une durée de communication mensuelle ainsi qu’un accès à Intemet 4G avec un volume prédéfini de données.

Le descriptif de chacune de ces offres est détaillé dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Offre n°1 | Offre n°2 | Offre n°3 |
| Montant mensuel du forfait (en euro) | 6 | 10 | 18 |
| Durée de communication (en heure) | 2 | 2 | 6 |
| Données internet (en Go) | 0,2 | 2 | 20 |

**1.** On considère les matrices , et .

**a)** Lequel de ces deux produits de matrices est-il défini : ou ? Justifier.

**b)** Effectuer ce produit de matrices à la calculatrice et interpréter le résultat obtenu.

**2.** On donne P la matrice inverse de M dont les coefficients sont arrondis à la quatrième décimale :

Pour un mois donné, l’opérateur a obtenu un chiffre d’affaires de 26 540 € pour l’ensemble de ces trois offres. On sait que cela correspond à la mise à disposition de 7 780 h de communications et à un volume de données internet de 14 440 Go.

On définit les matrices et où x désigne le nombre de clients ayant choisi l’offre n°1, *y* le nombre de clients pour l’offre n°2 et z le nombre de clients pour l’offre n°3.

**a)** Écrire une égalité matricielle représentant la situation en utilisant les matrices *M*, *C* et X.

**b)** Montrer l’égalité matricielle .

**c)** En déduire le nombre de clients ayant choisi chacune des trois offres. Les valeurs seront arrondies à la dizaine.

**Exercice 3 :**

Un étudiant du BTS SIO a mis en place un moteur de recherche avec lequel les pages affichées sont ordonnées par pertinence, selon le nombre de liens hypertextes pointant vers chaque page.

Cette partie étudie un exemple simplifié, en limitant ce moteur de recherche aux quatre pages web A, B, C et D définies dans la partie A, et en considérant le graphe associé G.

La méthode mise en place par l’étudiant consiste à associer un score à chaque sommet du graphe.

Les scores a, b, c, d de chacun des sommets A, B, C, D, sont calculés à partir des instructions suivantes :

- on liste les prédécesseurs du sommet considéré dans le graphe G ;

- on divise le score de chaque prédécesseur par le nombre de ses successeurs ;

- le score d’un sommet est obtenu en ajoutant les quotients obtenus.

Exemple : le sommet A possède deux prédécesseurs B et C ; B a 2 successeurs et C a 1 successeur.

D’où .

**1.** Justifier l’égalité : .

**2.** En établissant les quatre égalités vérifiées par les scores a, b, c, d, on obtient un système de quatre équations linéaires aux inconnues a, b, c, d. Ce système ayant une infinité de solutions, toutes proportionnelles entre elles, on pose a = 1 et on admet que la résolution se ramène à celle du système :

(*S*) :

On définit les matrices : , et .

**a)** Exprimer le système (S) sous la forme A×X = Y, où Y est une matrice à préciser.

**b)** Calculer le produit B×A.

**c)** En déduire que X = B×Y, puis donner la solution du système (S).

**3.** Donner, en justifiant, le classement des pages web A, B, C et D selon la méthode mise en place.

**Exercice 4 (**8 points)

On donne la matrice

Le but de cet exercice est de décrire un procédé de codage d'un *mot* de deux lettres (**partie A**) à l'aide de la matrice *A*, puis de détailler une méthode de décodage de ce *mot* (**partie C**) en s'appuyant sur des résultats mathématiques établis dans la **partie B**.  
  
Un *mot* de deux lettres est assimilé à une matrice colonne , où *x* est le nombre correspondant à la première lettre du *mot*, et *y* le nombre correspondant à la deuxième lettre du *mot*, selon le tableau de correspondance ci-après :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | G | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Ainsi, par exemple, le *mot* « SI » est assimilé à la matrice.

**Partie A : codage d'un *mot* de deux lettres**

Pour coder le mot assimilé à la matrice , on calcule la matrice telle que , puis la matrice , où les nombres *c* et *d* sont les restes respectifs de la division euclidienne par 26 des nombres *u* et *v*. Le *mot* codé est alors le *mot* de deux lettres assimilé à la matrice selon le tableau de correspondance précédent, c'est-à-dire que *c* et *d* sont les deux lettres du *mot* codé.

Déterminer le *mot* codé correspondant au *mot* « SI ».

**Partie B : deux résultats mathématiques On considère les matrices**

On considère les matrices et .

**1.** Justifier la congruence : .

**2. a)** Calculer le produit matriciel , puis exprimer ce produit en fonction de la matrice .

**b)** Soit et deux matrices quelconques à deux lignes et une colonne. Justifier que si , alors .

**Partie C : décodage d’un mot**

On souhaite décoder le *mot* « BE », associé à la matrice .

Si est la matrice associée au *mot* de départ, la matrice définie par l’égalité a ses coefficients qui vérifient : d’après la partie A.

**1.** En utilisant la question **B 2.**, démontrer que

En déduire que

**2.** En utilisant la question **B 1.**, démontrer que puis décoder le *mot* « BE ».

Exercice **5** (6 points)

Lors de la transmission d’un message entre un émetteur et un récepteur, il est possible que le message soit altéré par des erreurs. On utilisera le vocabulaire suivant :

- un mot est une suite de 4 bits ;

- le code initial est le code envoyé par l’émetteur, il est constitué de 7 bits ;

- le code reçu est le code reçu par le récepteur, il est constitué de 7 bits.

On s’intéresse dans cet exercice à un code correcteur dit code de Hamming dont l’intérêt est de permettre de retrouver le code initial si une erreur intervient dans la transmission du code.

**1. Travail préliminaire**

On appelle « réduction d’un entier modulo 2 » le reste de la division euclidienne de cet entier par 2.

Par exemple 11 = 2×5 + 1 donc la réduction de 11 modulo 2 est égale à 1.

**a)** Donner les 3 plus petits entiers naturels dont la réduction modulo 2 est égale à 1.  
**b)** Quelle est la réduction modulo 2 d’un entier pair ?

Dans la suite de cet exercice, tous les produits de matrices seront calculés de façon habituelle, puis on donnera la réduction modulo 2 de tous les coefficients.

**2. Codage d’un mot**

On veut transmettre un mot de 4 bits. On le représente par une matrice à 1 ligne et 4 colonnes, par exemple le mot 0100 est représenté par la matrice :

.

Pour calculer son codage, on définit la matrice G suivante :

.

La fonction de codage C, qui donne le code *c*, est la fonction injective définie pour tout mot m de longueur 4 par le produit de matrices :

.

Par exemple pour le mot , on a le code :

et, après réduction modulo 2, on obtient bien : .

**a)** Calculer le code du mot .  
 On rappelle que les coefficients de la matrice obtenue doivent être réduits modulo 2.

**b)** Parmi les réponses suivantes, laquelle traduit le fait que la fonction de codage C est injective ? Recopier sur la copie la seule bonne réponse.

• Le code d’un mot contient 7 bits différents.  
 • Il existe un code de 7 bits.  
 • Deux mots différents ont des codes différents.  
 • Tout code de 7 bits est l’image d’un mot de 4 bits.

**3. Décodage**

La fonction de décodage D est la fonction surjective qui associe à tout code c le mot m = D(c) tel que c = C(m). Le processus de codage-décodage permet donc de coder un mot avant sa transmission et de retrouver ce mot après sa transmission.

**a)** Soit H la matrice à 7 lignes et 4 colonnes définie par : .  
On remarque que l’on a .  
Montrer que l’égalité implique l’égalité .  
**b)** On reçoit le code . Il n’y a pas eu d’erreur de transmission.  
Retrouver le mot m qui a été codé par l’émetteur.

**4. Vérification de la présence d’une erreur et correction**

Dans la suite, on appelle erreur le remplacement d’un seul bit du code initial (0 au lieu de 1, ou 1 au lieu de 0).  
Pour vérifier l’apparition d’une telle erreur dans le code reçu c et la corriger, on utilise une matrice dite de parité P définie par :

.

On calcule le produit matriciel . Les coefficients résultants sont réduits modulo 2.

Si le résultat est alors il n’y a pas eu d’erreur au sens défini ci-dessus.

Par exemple, si le code reçu est alors il n’y a pas eu d’erreur au sens défini ci-dessus.

Sinon, le résultat obtenu correspond à la décomposition binaire de la position de l’erreur.

Par exemple, si le code reçu est on a , donc il y a eu une erreur. Comme 1002 = 4, l’erreur porte sur le 4e bit en partant de la gauche, on en déduit que le code initial était .

Parmi les deux codes suivants, déterminer celui qui contient une erreur puis la corriger. Justifier (on ne demande pas le mot m correspondant à ce code).

•  ; •

**Exercice 6 : Étude des connexions**

La salle informatique doit comprendre cinq postes nu­mérotés de 1 à 5 et branchés en réseau selon le graphe orienté ci-contre.

Dans ce graphe, une flèche d’un poste A vers un poste B traduit le fait que l’on peut envoyer des données de A vers B.

**1.** Donner la matrice d’adjacence M de ce graphe en prenant les numéros des postes dans l’ordre croissant.

**2.** Déterminer la matrice de la fermeture transitive de ce graphe.

**3.** Pour permettre l’envoi de données entre les postes, même en cas de défaillance d’une connexion on utilise la fermeture transitive du graphe.

Dessiner sur la copie le graphe correspondant à cette fermeture transitive.

**Partie B**Une agence de voyage de la zone euro propose un circuit touristique pour visiter les 3 villes A, B et C. Le client peut choisir la durée du séjour dans chaque ville. L’agence distingue deux périodes, la haute et la basse saison, et différencie ses tarifs selon la période.

Les tarifs journaliers dans les différentes villes, en centaines d’euro par personne, sont donnés dans le tableau suivant. L’euro est noté €.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ville A | Ville B | Ville C |
| Nombre de jours | 1 | 1 | 1 |
| Tarif haute saison | 2 | 2,5 | 1,5 |
| Tarif basse saison | 1 | 2 | 1 |

On note la matrice .

**1.** Monsieur Martin a choisi un circuit qui comprend 3 jours dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 5 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice .   
**a)** Calculer le produit matriciel . Que représentent les termes de la matrice obtenue ?

**b)** Monsieur Martin dispose de 1500€. Pourra-t-il réaliser son voyage ?

**2.** On considère la matrice et on note la matrice unité : .

**a)** Calculer le produit matriciel .

**b)** Soient X et Y deux matrices colonnes quelconques à 3 lignes et 1 colonne.

Montrer que, si , alors .

**3.** Dans une publicité, l’agence de voyage affirme qu’un circuit complet de 12 jours est possible au tarif de 2250€ en haute saison et 1400€ en basse saison.

Comment se compose ce circuit, en nombre de jours dans chacune des villes ?

**Exercice 7** (9 points)

Pour s’inscrire en BTS SIO, les étudiants doivent passer par la chaîne d’inscription mise en place dans leur établissement d’accueil. Cette chaîne d’inscription est composée de cinq postes :

* photo (P) : réalisation d’une photo d’identité numérique de l’étudiant ;
* service médical (M) : entretien avec l’infirmière de l’établissement (vaccinations et adaptation de la scolarité) ;
* transport (T) : mise à disposition des formulaires et justificatifs destinés aux sociétés de transports en commun ;
* administration (A) : constitution du dossier administratif ;
* scolarité (S) : constitution du dossier scolaire et choix des options.

Un étudiant qui s’inscrit doit passer par ces différents postes en respectant les contraintes suivantes :

* après le poste *photo,* l’étudiant peut se rendre au *service médical,* au *transport* ou à l’*administration ;*
* après le *service médical,* l’étudiant peut se rendre au *transport* ou à l’*administration* ;
* après le *transport,* l’étudiant peut se rendre au *service médical* ou à *l’administration* ;
* après 1*’administration,* l’étudiant peut se rendre à la *scolarité.*

On définit le graphe orienté correspondant à cette situation. Les sommets associés aux différents postes de la chaîne sont nommés P, M, T, A, S dans cet ordre.

On donne la matrice d’adjacence *B* de ce graphe :

On définit le graphe orienté correspondant à cette situation. Les sommets associés aux différents postes de la chaîne sont nommés P, M, T, A, S dans cet ordre.

On donne la matrice d’adjacence B de ce graphe :

.

**1.** Donner la représentation géométrique de ce graphe.

**2.** Dans le contexte de l’exercice, que signifient :

**a)** les zéros de la première colonne ?

**b)** les zéros de la dernière ligne ?

3. a) Citer un chemin hamiltonien de ce graphe.

b) Comment peut-on interpréter l’existence d’un tel chemin dans le contexte de l’exercice ?

4. a) Recopier et compléter les coefficients de la matrice *B*3 :

.

b) Interpréter le coefficient de la première ligne et quatrième colonne de la matrice B3, dans le contexte de l’exercice.

**5.** On définit la matrice :

.

**a)** Vérifier, par une méthode au choix, que est la matrice d’adjacence de la fermeture transitive du graphe associé à la matrice B.

**b)** Interpréter, dans le contexte de l’exercice, le coefficient de la deuxième ligne et cinquième colonne de la matrice .